$-BCD$的高AO，因建系容易，自然考虑建立坐标系，由二面角的大小求解. 或者直接用三垂线法作出二面角$E-BC-D$的平面角，如图3，即作$EF\perp BD$于F，$FM\perp BC$于M，连FM，去证$\angle EMF$为二面角$E-BC-D$的平面角，算得$AO=1$，$V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

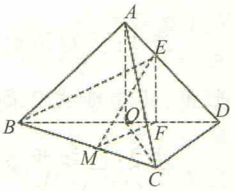

图3

三、解法思路要自然

教师的作用是启思导学，“授人以渔”，进行激励、唤醒、引领. 学习数学离不开解题，解题的目的是巩固和加深对数学知识的理解，提高思维能力. 在解决问题过程中，要引导学生多角度、多方位、多层次的思考，寻找解决的线索或路径，并注意整理思路，使“条理清楚，逻辑严密，步步有据，思路清晰，规范简洁”.

教学是师生的共同活动，“教学做合一”，教学生学，在做中教，在做中学，在做中感悟. “做”是核心，在做中融会贯通，灵活运用. 解题思路要自然而然地展开，把复杂的东西简单化，难理解的东西通俗化，弄懂“为什么这样想”，找到更适合学生的自然解法，从而实现模仿到创新.

例3 （2016全国Ⅰ卷理）已知函数$f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$有两个零点.

(1)求a的取值范围；(2)设x_1,x_2是$f(x)$的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$.

在参考答案中，对第(1)问，当$a>0$时，为什么想到要取b满足$b<0$且$b<\ln\frac{a}{2}$，很诡异，不自然，难懂. 下面解法自然，易理解. 第(2)问，用逆向思考，利用函数的单调性，等价转化为函数值间的不等关系，构造函数，可轻松获解.

(1)**解法1**：(对参数分类讨论)$f'(x)=(x-1)e^x+2a(x-1)=(x-1)(e^x+2a)$.

(i)设$a=0$，则$f(x)=(x-2)e^x$，$f(x)$只有一个零点$x=2$，不符合题意.

(ii)设$a>0$，则当$x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$. 所以$f(x)$在$(-\infty,1)$单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增. 又$f(1)=-e<0$，$f(2)=a>0$，当$x\to-\infty$时，$f(x)\to+\infty$，此时$f(x)$存在两个零点，符合题意.

(iii)设$a<0$，由$f'(x)=0$得$x=1$或$x=\ln(-2a)$. 若$a\geqslant-\frac{e}{2}$，则$\ln(-2a)\leqslant1$，故当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，因此$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增. 又当$x\leqslant1$时，$f(x)<0$，所以$f(x)$不存在两个零点. 若$a<-\frac{e}{2}$，则$\ln(-2a)>1$，故当$x\in(1,\ln(-2a))$时，$f'(x)<0$；当$x\in(\ln(-2a),+\infty)$时，$f'(x)>0$. 因此$f(x)$在$(1,\ln(-2a))$单调递减，在$(\ln(-2a),+\infty)$单调递增. 又当$x\leqslant1$时，$f(x)<0$，所以$f(x)$不存在两个零点. 综上，a的取值范围为$(0,+\infty)$.

解法2：(分离参数)当$x=1$时，$f(1)=-e\neq0$不是$f(x)$零点，当$x\neq1$时，$f(x)=0$等价于$a=\frac{(2-x)e^x}{(x-1)^2}=g(x)$，则$g'(x)=-e^x\cdot\frac{x^2-4x+5}{(x-1)^3}$. $\because$当$x<1$时$g'(x)>0$，当$x>1$时$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，又当$x<2$时，$g(x)>0$，当$x>2$时，$g(x)<0$，而$x\to-\infty$时，$g(x)\to0$，结合图象4可知要使$f(x)$有两个零点，即方程$a=g(x)$有两个实根，只需$a>0$，$\therefore a$的取值范围为$(0,+\infty)$.

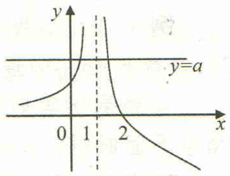

图4

(2)**证法1**：由解法1知$f(x)$在$(-\infty,1)$单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增，由(1)结果不妨设$x_1<1<x_2$，要证明$x_1+x_2<2\Leftrightarrow x_1<2-x_2<1\Leftrightarrow f(x_1)>f(2-x_2)$，$\because f(x_1)=f(x_2)$，即证$f(x_2)>f(2-x_2)$. 设$h(x)=f(x)-f(2-x)$，$x>1$，则问题等价于证$h(x)>0$. $\because h(x)=(x-2)e^x+xe^{2-x}$，$\therefore h'(x)=(x-1)(e^x-e^{2-x})$. $\therefore$当$x>1$时，$e^x-e^{2-x}>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(1,+\infty)$单调递增，$h(x)>h(1)=0$，从而原问题得证.

证法2：由解法2知$f(x)$零点满足$x_1<1<x_2$，则要证明$x_1+x_2<2\Leftrightarrow1<x_2<2-x_1$，$\because g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，$\therefore$只需证$g(x_2)>g(2-x_1)$，又$g(x_1)=g(x_2)$，从而只需证$g(x_1)>g(2-x_1)$，$x_1<1$，即证$\frac{2-x_1}{(x_1-1)^2}e^{x_1}>\frac{x_1}{(1-x_1)^2}e^{2-x_1}$，构造函数$\varphi(x)=e^x(2-x)-xe^{2-x}$，$x<1$，问题转化为证明当$x<1$时$\varphi(x)>0$，$\because\varphi'(x)=(e^x-e^{2-x})(1-x)$，$\therefore$当$x<1$时，$e^x-e^{2-x}<0$，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$在$(-\infty,1)$单调递减，$\varphi(x)>\varphi(1)=0$，原问题得证.

四、问题变式要自然

教学不仅是传授学生知识，更重要的是培养学生的思维能力，进行思想引领. 在课堂教学中，应抓住思维训练这条主线，进行变式教学，通过问题驱动，激发学生去思考、创新. 变式就是改变问题的条件或结论，变换问题的形式或内容，一般化或特殊