

需证 $\frac{[\sum a(a + \sqrt{bc})]^2}{4 \sum ab} \geq \sum ab$, 即证 $[\sum a(a + \sqrt{bc})]^2 \geq 4(\sum ab)^2$, 即证 $\sum a(a + \sqrt{bc}) \geq 2 \sum ab$, 即证 $\sum (a - b)^2 \geq \sum c(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, 即证 $\sum (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq \sum c(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, 即证 $\sum [(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c](\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, 即证 $\sum (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, 即证 $\sum (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

设 $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}$, 即证 $\sum (x + y - z)(x - y)^2 \geq 0$, 即证 $\sum x^3 + 3xyz \geq \sum x^2(y + z)$.
上式即为 Schur 不等式, 所以, 原不等式成立.

从证法1与证法2, 我们得到赛题的两个加强不等式链, 整理如下:

加强不等式链1 设 $a, b, c > 0$, 则 $\sum \frac{a(a^2 + bc)}{(b + c)} \geq \frac{(\sum a^2)^2}{2 \sum ab} + \frac{9abc}{2 \sum a} \geq \frac{(\sum a^2)^2}{2 \sum ab} + \sum ab - \frac{1}{2} \sum a^2 \geq \sum ab$.

加强不等式链2 设 a, b, c 均为正数, 则

$$\sum \frac{a(a^2 + bc)}{(b + c)} \geq \sum \frac{a(a + \sqrt{bc})^2}{2(b + c)} \geq \frac{[\sum a(a + \sqrt{bc})]^2}{4 \sum ab} \geq \sum ab.$$

进一步的问题是: 能否将两个不等式链合二为一? 事实上, 当 $a = b = 1, c = 2$ 时, 有 $\frac{[\sum a(a + \sqrt{bc})]^2}{4 \sum ab} > \frac{(\sum a^2)^2}{2 \sum ab} + \frac{9abc}{2 \sum a}$, 但当 $a = b = 100, c = 1$ 时, 有 $\frac{(\sum a^2)^2}{2 \sum ab} + \sum ab - \frac{1}{2} \sum a^2 > \sum \frac{a(a + \sqrt{bc})^2}{2(b + c)}$, 所以, 两个不等式链不能合二为一.

参考文献

- [1] 中国数学会普及工作委员会及数学奥林匹克委员会组编. 高中数学联赛备考手册(2019)[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2018.
- [2] 刘康宁. 2018年全国高中数学联赛陕西赛区预赛[J]. 中等数学, 2018(7): 33-37.

版权声明

本刊已许可中国知网、万方数据、维普资讯、超星及博看网等以数字化方式复制、汇编、发行、信息网络传播本刊全文. 如作者不同意网络传播, 请在投稿时声明, 本刊将做适当处理.

欢迎订阅

方式一: 邮局各网点, 邮发代号 44-33;

方式二: 微信扫描二维码进入中国邮政-微商城订阅.



中学数学研究

¥8.0

价格具有时效性

